

AJUSTE DA FUNÇÃO GAMA AOS TOTAIS SEMANAIS DE CHUVA DE PELOTAS-RS¹

FITTING OF GAMMA DISTRIBUTION TO WEEKLY TOTAL RAINFALL IN PELOTAS, RS

Francisco Neto de Assis²

RESUMO

Foram analisados os totais semanais de chuva de Pelotas-RS, correspondentes ao período de 1893 a 1991. Concluiu-se que a quantidade de chuva nas semanas com chuva, pode ser adequadamente representada pela função de distribuição de probabilidade gama.

Palavras-chave: clima, chuva, modelagem, distribuição gama.

SUMMARY

A model to describe the weekly rainfall of Pelotas, Rio Grande do Sul State was proposed. The weekly total rainfall showed a good fitting with the gamma distribution model.

Key words: climate, rainfall, modelling, gamma distribution.

INTRODUÇÃO

Os dados climatológicos de um local ou região podem ser analisados pela simples inspeção dos registros históricos ou, alternativamente, pelo ajuste de um modelo teórico a esses dados. O modelo teórico apresenta a vantagem de sintetizar as informações para alguns poucos parâmetros de uma equação, no que resulta em uma grande facilidade de seu manuseio.

Um modelo teórico para descrever a variabilidade da chuva pode ser desenvolvido em duas etapas

¹Trabalho realizado no departamento de Fitotecnia da Faculdade de Agronomia Eliseu Maciel-UFOEL, através do convênio EMBRAPA/UFPEL.

² Prof. Adj. do Departamento de Fitotecnia da Faculdade de Agronomia Eliseu Maciel da Universidade Federal de Pelotas. Caixa Postal, 354. 96100

onde a primeira reproduz a condição de ocorrência e a segunda representa a quantidade de chuva. ASSIS (1991), elaborou modelos teóricos para descrever a ocorrência e a quantidade de chuva diária em Pelotas com base na distribuição binomial negativa truncada e na distribuição de probabilidade gama. A função de distribuição de probabilidade gama (THOM, 1958; 1966) pode ser considerada como a mais adequada para representar a quantidade de chuva de períodos curtos (uma semana, cinco dias, um dia). ROLDAN & WOOLHISER (1982) fizeram uma comparação entre diversas distribuições de probabilidade, incluindo a gama, a exponencial e a exponencial mista, concluindo que a última foi superior as demais para períodos de quatorze dias. VIVALDI (1973) utilizou a distribuição gama e fez uma análise das estimativas dos seus parâmetros, concluindo que o modelo mostrou-se eficiente, independentemente do tamanho do período considerado (um a 25 dias). Com base nos resultados de VIVALDI (1973), FONSECA & ALBUQUERQUE (1978) estimaram os parâmetros da distribuição gama para modelar a precipitação em períodos de uma, duas e três semanas de uma estação meteorológica de Pelotas, RS. Já GARCIA & CASTRO (1986) analisaram 81 séries de registros diários de chuva da Bacia do Alto Paraguai, que compreende o pantanal matogrossense e utilizaram a distribuição gama para períodos de trinta, quinze e sete dias, concluindo que os melhores ajustes das séries de dados foram para períodos de trinta dias.

O principal objetivo deste trabalho é ajustar os totais semanais de chuva de Pelotas à função de distribuição de probabilidade gama.

MATERIAL E MÉTODOS

Os dados analisados neste trabalho foram os totais semanais de chuva obtidos na Estação Agroclimatológica da Faculdade de Agronomia Eliseu Maciel da Universidade Federal de Pelotas, RS (Latitude 31°52'00"S, Longitude 52°21'24"W e Altitude 13,24 m), no período de 1893 a 1991. Os totais de chuva da nona semana (26 de Fev a 04 de Mar), nos anos bissextos, foram multiplicados por 7/8 para compatibilizá-la com as demais. A mesma correção foi aplicada aos valores da última semana do ano (24 de Dez a 31 de Dez) que, por força da divisão do ano, tem sempre 8 dias.

Para modelar a quantidade de chuva nas semanas com chuva, foi utilizado o seguinte modelo misto.

$$P(Y \leq y) = P_s + P_c \cdot G(Y \leq y) \quad (1)$$

onde P_s é a probabilidade de não chover na semana e P_c , o seu complemento, isto é, a probabilidade de chover na semana. $G(Y)$ é a função cumulativa de distribuição de probabilidade gama na forma

$$G(Y \leq y) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{g})\mathbf{b}^y} \int_0^y \mathbf{g}^{y-1} e^{-y/\mathbf{b}} d\mathbf{g} \quad (2)$$

$$0 < Y \leq \infty; \quad \mathbf{g}, \mathbf{b} > 0$$

Na eq. (2) o termo $\Gamma(\mathbf{y})$ que significa,

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \int_0^{\infty} \mathbf{g}^{y-1} e^{-y} d\mathbf{g} \quad (3)$$

foi obtida por aproximação através da seguinte relação (ABRAMOWITS & STEGUN 1972):

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{g}}} e^{\mathbf{g}[1\ln y - f(\mathbf{g})]} \quad (4)$$

na qual

$$f(\mathbf{y}) = 1 - \frac{1}{12.\mathbf{g}^2} + \frac{1}{360.\mathbf{g}^4} - \frac{1}{1260.\mathbf{g}^6} \quad (5)$$

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros de escala (\mathbf{b}) e de forma (\mathbf{g}) foram obtidas pelo método de THOM (1958), segundo o qual

$$\mathbf{g} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{A}{3}}}{4A} \quad (6)$$

sendo

$$A = \ln \bar{Y} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i \quad (7)$$

onde

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i$$

é a média geométrica e

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (10)$$

a média aritmética das observações.

A função de distribuição cumulativa (eq. 2) não tem solução imediata. Desse modo as estimativas das chuvas para determinados valores de probabilidade devem ser obtidos ou por integração numérica ou por desenvolvimento em série. No presente caso, foi utilizada a última alternativa através da seguinte função:

$$G(t) = \frac{t^g}{g\Gamma(g)e^{-t}} F(g, t) \quad (11)$$

onde

$$F(g, t) = 1 + \frac{t}{g+1} + \frac{t^2}{(g+1)(g+2)} + \frac{t^3}{(g+1)(g+2)(g+3)} + \dots \quad (12)$$

A probabilidade de ocorrência de um valor de chuva menor ou igual a Y é dado por $G(t)$, onde $t = Y/b$

Para a estimativa da chuva Y a um determinado valor de probabilidade Pr determina-se na eq. (11) o valor de t que satisfaça a igualdade

$$G(t) - Pr = 0 \quad (13)$$

Este é um processo iterativo no qual o algoritmo de Newton-Raphson foi utilizado na seguinte forma

$$t_{i-1} = t_1 \frac{\frac{t_i^g}{\Gamma(g)e^{t_i}} \cdot G(g, t) - Pr}{\frac{t_i^{g-1}}{\Gamma(g)e^{t_i}}} \quad (14)$$

O valor inicial de t (t_0) para iniciar a iteração depende de g e Pr . O critério aqui utilizado foi o de THOM (1968), cujos detalhes são encontrados em ASSIS (1991).

Para avaliar o ajuste entre os valores observados e estimados pelas distribuições de probabilidade foi utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov (CAMPOS, 1979).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A distribuição de frequência dos totais semanais de chuva de Pelotas é caracterizada pela forte assimetria positiva (Tabela 1). A forma de sua curva é do tipo J invertido, contendo cerca de 10 a 26% de valores nulos na classe de maior frequência. Tal distribuição é típica da função de distribuição de probabilidade gama, a qual tem uma ampla capacidade de ajuste a diversos tipos de curvas, desde aquelas completamente assimétricas até normal as quase normal.

Os parâmetros g e β da função de distribuição de probabilidade gama são apresentados na Tabela 1. Também encontram-se os valores do desvio máximo do teste de Kolmogorov-Smirnov, todos não significativos ao nível de 5% de probabilidade, indicativo o ajuste adequado dos dados.

Assim(1991) demonstrou que os valores diários de chuva de pelotas da série de 1985 a 1989 puderam ser modelados pela função de distribuição de probabilidade gama e que em face da pequena oscilação do valor do parâmetro γ (0,9028 a 1,0119) ao longo do ano, ele pode ser considerado constante e igual 0,9714. No caso presente, é mais consistente considerar-se os valores do parâmetro de cada semana tendo em conta a sua ampla variação: 0,8277, na última semana do ano. O parâmetro β variou entre 15,0244 na última semana e 44,2348 na Segunda semana de abril. Com a ocorrência de valores nulos, o modelo a ser adotado é do tipo indicado na eq. (1) aqui descrito na forma:

$$P = P_s + P_c \cdot Pr$$

Tabela 1 - Coeficiente de assimetria, totais de zeros e valores de média, variância, dos parâmetros da função de distribuição de probabilidade gama e do desvio máximo do teste de Kolmogorov-Smirnov, referentes aos totais semanais de chuva de Pelotas (RS) no período de 1893 a 1991.

Início da Semana	Coef. de Assin.	Nr. de Zeros	Média	Var.	β	γ	D_{max}	Início da Semana	Coef. de Assin.	Nr. de Zeros	Média	Var.	β	γ	D_{max}
01-Jan	2,67	24	31,5	797,50	22,0121	1,4333	0,023	02-Jul	2,22	9	30,4	1094,95	33,4912	0,3069	0,030
08-Jan	1,70	18	26,6	662,72	26,5208	1,0048	0,043	09-Jul	2,51	20	28,7	870,92	29,5774	0,3692	0,035
15-Jan	2,32	14	29,1	974,56	31,2890	0,9303	0,031	16-Jul	2,24	20	35,9	1592,49	37,6544	0,9527	0,037
22-Jan	2,88	16	37,3	1503,73	37,2548	1,0009	0,020	23-Jul	2,27	11	28,1	800,97	23,9275	1,1728	0,033
29-Jan	2,03	16	31,0	790,65	30,4681	1,0167	0,040	30-Jul	2,19	13	33,7	1309,34	36,0494	0,9343	0,049
05-Fev	2,16	15	35,8	1425,26	37,5431	0,9813	0,026	06-Ago	1,93	20	35,0	1238,66	34,2394	1,0230	0,063
12-Fev	2,72	14	39,3	1906,94	38,6738	1,0173	0,031	13-Ago	4,27	16	31,7	1376,91	31,4137	1,0089	0,037
19-Fev	3,10	19	31,8	1464,91	35,4135	0,8965	0,032	20-Ago	2,51	18	31,8	970,02	26,8486	1,1843	0,041
26-Fev	2,09	15	29,9	814,78	27,9531	1,0698	0,036	27-Ago	2,10	12	35,7	1418,69	40,3165	0,8864	0,027
05-Mar	1,95	18	27,3	750,20	25,7424	1,0594	0,058	03-Set	1,73	13	35,1	1024,14	32,9314	1,0669	0,061
12-Mar	2,61	17	31,6	973,89	27,4684	1,1498	0,035	10-Set	1,76	10	34,9	779,43	25,4001	1,3758	0,034
19-Mar	2,59	31	28,6	912,73	29,7389	0,9631	0,022	17-Set	1,51	15	35,4	693,37	27,1437	1,3046	0,085
26-Mar	1,94	13	32,6	1148,51	34,8497	0,9351	0,042	24-Set	2,47	21	37,3	1472,64	39,3964	0,9465	0,042
02-Abr	2,18	22	31,0	1138,75	32,9618	0,9399	0,061	01-Out	2,32	18	38,2	1797,62	44,1445	0,8650	0,021
09-Abr	3,09	17	36,3	2214,88	44,2348	0,8208	0,026	08-Out	1,80	23	35,9	796,98	30,3370	0,8365	0,063
16-Abr	2,61	26	25,8	1233,87	31,3239	0,8230	0,074	15-Out	2,10	16	25,0	690,02	27,1709	0,9206	0,051
23-Abr	2,29	26	22,3	745,42	28,4243	0,7829	0,053	22-Out	2,23	19	24,8	692,08	24,1481	1,0289	0,045
30-Abr	3,11	24	24,1	948,31	29,0839	0,8277	0,035	29-Out	1,85	14	26,5	640,82	26,3890	1,0057	0,031
07-Mai	2,06	23	24,2	685,38	26,2335	0,9232	0,041	05-Nov	1,98	23	21,8	381,91	18,4026	1,1853	0,045
14-Mai	4,17	16	28,5	1774,57	33,2568	0,8574	0,032	12-Nov	2,18	23	26,7	799,40	27,0494	0,9861	0,032
21-Mai	2,15	24	29,9	933,28	28,4892	1,0478	0,033	19-Nov	2,32	20	22,8	556,20	21,5184	1,0597	0,039
28-Mai	2,11	19	33,3	1219,80	38,2517	0,8714	0,047	26-Nov	2,20	11	20,5	392,70	19,2342	1,0672	0,032
04-Jun	1,99	17	28,4	841,63	29,6063	0,9586	0,032	03-Dez	1,84	16	25,1	564,28	24,1266	1,0390	0,031
11-Jun	2,32	20	29,6	871,21	29,5339	1,0010	0,047	10-Dez	2,12	21	25,4	649,21	25,3748	0,9995	0,037
18-Jun	1,99	16	32,9	1103,31	34,1254	0,9643	0,022	17-Dez	2,14	21	25,8	606,72	24,2566	1,0634	0,023
25-Jun	3,49	21	36,5	1584,13	35,2963	1,0340	0,050	24-Dez	2,05	19	19,6	325,92	15,0244	1,1051	0,065

As estimativas de P_s e P_r são mostradas na Tabela 2. P_r é a probabilidade de chover um valor menor ou igual a certa quantidade de chuva, supondo que chova, na semana considerada, dada pela eq. (2). Na Tabela 2 são mostrados os valores de chuva correspondentes aos valores de P_r entre 0,1 e 0,999.

A Tabela 2 permite estimar: **1. A probabilidade de chover em determinada semana (P_c)**. Na segunda coluna da Tabela 2 encontram-se os valores da probabilidade de não chover (P_s) em cada uma das 52 semanas climatológicas. Qual é a probabilidade de chover na primeira semana de Janeiro? Tem-se $P_s = 0,2424$, logo $P_c = 1 - 0,2424 = 0,7676$. Portanto a probabilidade de chover na primeira semana de Janeiro é de 76,76%, isto é, espera-se que chova em 76 ou 77 anos de um conjunto de 100 anos; **2. A quantidade de chuva correspondente a determinado valor de probabilidade (P_r)**. Da eq. (14) tem-se que $P_r = (P - P_s)/(1 - P_s)$. Qual é a quantidade de chuva correspondente à probabilidade de 72,2% na primeira semana do ano? P_r

= $(0,722 - 0,2424)/0,7676 = 0,625$. Este valor está compreendido entre os valores de probabilidades constantes da Tabela 2 de 0,6 e 0,7. Portanto, a quantidade de chuva correspondente a 75% é um valor situado entre 30,8 e 38,5 mm. É importante ressaltar que a quantidade de chuva correspondente à probabilidade de 62,5% é uma boa aproximação da média semanal de chuva. No caso presente, então, a quantidade de chuva correspondente a probabilidade total de 75%, que corresponde à probabilidade de 62,5%, é, aproximadamente, de acordo com os dados da Tabela 1, 31,5 mm. O nível de probabilidade de 62,5% corresponde a posição da mediana da função de distribuição de probabilidade gama;

3. A probabilidade correspondente à determinada quantidade de chuva. Admita-se que se queira estimar a probabilidade de chover, na primeira semana do ano, uma quantidade de chuva menor ou igual a 50 mm. Como 50 mm não consta na Tabela 2, considere-se as probabilidades (*Pr*) correspondentes a 49,1 mm (*Pr* = 0,8) e 66,5 mm (*Pr* = 0,9). Como *Ps* = 0,2424 e *Pc* = 0,7676, a probabilidade de chover uma quantidade

Tabela 2 - Proporção de semanas sem chuva (*Ps*), valores de precipitação (*Y* em mm) tais que $Pr(Y \leq Y) = \alpha$ e valores máximos semanais de precipitação observados para Pelotas, RS

Início da Semana	Ps	P R O B A B I L I D A D E S (α)										Max. Obs.	Início da Semana	Ps	P R O B A B I L I D A D E S (α)										Max. Obs.
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,1				0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9			
01-Jan	0,2424	5,8	10,2	14,6	19,3	24,6	30,8	38,5	49,1	66,5	173,6	02-Jul	0,0909	2,6	6,0	9,9	14,6	20,2	27,2	36,3	49,3	71,8	68,7		
08-Jan	0,1818	2,8	6,0	9,5	13,7	18,5	24,5	32,1	42,9	61,4	99,6	09-Jul	0,2020	2,8	6,2	10,0	14,4	19,6	26,1	34,5	46,3	66,6	170,2		
15-Jan	0,1414	2,7	5,9	8,7	12,2	16,6	22,2	29,4	38,9	52,3	168,0	16-Jul	0,2020	3,4	7,5	12,3	17,8	24,4	32,5	43,1	58,0	81,7	198,0		
22-Jan	0,1616	3,9	8,3	13,3	19,1	25,9	34,2	44,9	60,1	85,9	249,4	23-Jul	0,1111	3,9	7,5	11,4	15,7	20,6	26,6	34,1	44,5	62,1	142,2		
29-Jan	0,1616	3,4	7,1	11,2	16,0	21,6	28,5	37,4	49,8	71,1	153,8	30-Jul	0,1313	3,1	6,9	11,3	16,5	22,7	30,4	40,4	54,6	79,0	167,3		
05-Fev	0,1515	3,7	8,0	12,9	18,6	25,4	33,6	44,3	59,4	85,3	200,1	06-Ago	0,2020	3,8	6,0	12,7	18,1	24,5	32,3	42,3	56,3	80,3	168,2		
12-Fev	0,1414	4,3	9,0	14,2	20,3	27,5	36,2	47,4	63,3	90,3	246,8	13-Ago	0,1616	3,4	7,2	11,4	16,3	22,1	29,1	38,2	51,0	72,9	281,4		
19-Fev	0,1919	2,7	6,2	10,3	15,2	21,1	28,4	38,0	51,7	75,4	209,9	27-Ago	0,1313	3,0	6,8	11,4	16,9	23,6	31,8	42,7	58,1	85,0	167,8		
26-Fev	0,1515	3,6	7,2	11,3	15,9	21,3	27,8	36,2	47,9	67,8	153,5	20-Ago	0,1818	4,5	8,6	13,0	17,8	23,4	30,1	38,6	50,4	70,2	152,6		
05-Mar	0,1818	3,2	6,5	10,2	14,4	19,3	25,3	33,0	43,7	61,9	118,3	03-Set	0,1313	4,2	8,5	13,2	18,6	25,0	32,7	42,5	56,3	79,7	148,9		
12-Mar	0,1717	4,2	8,3	12,6	17,4	23,0	29,8	38,3	50,2	70,3	178,0	10-Set	0,1010	6,1	10,9	15,7	21,0	26,3	33,9	42,6	54,6	74,4	119,0		
19-Mar	0,3131	2,8	6,1	9,9	14,3	19,6	26,0	34,4	46,3	66,6	172,5	17-Set	0,1515	5,7	10,5	15,4	20,8	26,9	34,1	43,2	55,6	76,4	114,2		
26-Mar	0,1313	3,0	6,7	11,0	16,0	22,0	29,4	39,1	52,8	76,4	148,2	24-Set	0,2121	3,5	7,8	12,7	18,4	25,3	33,8	44,7	60,3	87,2	218,2		
02-Abr	0,2222	2,9	6,4	10,5	15,2	20,9	28,0	37,2	50,2	72,6	160,9	01-Out	0,1818	3,0	7,0	11,9	17,8	24,9	33,8	45,5	62,2	91,4	224,5		
09-Abr	0,1717	2,6	6,2	10,8	16,3	23,1	31,7	43,0	59,4	88,1	296,2	08-Out	0,2323	1,9	4,6	7,8	11,8	16,6	22,7	30,7	42,3	62,5	113,1		
16-Abr	0,2626	1,8	4,4	7,7	11,6	16,4	22,5	30,6	42,2	62,5	159,0	15-Out	0,1616	2,2	5,0	8,3	12,1	16,8	22,5	30,0	40,6	58,9	127,3		
23-Abr	0,2626	1,4	3,5	6,3	9,6	13,8	19,1	26,2	36,5	54,7	126,0	22-Out	0,1919	2,8	5,7	9,1	12,9	17,4	22,9	30,0	39,9	56,9	125,0		
30-Abr	0,2424	1,7	4,2	7,2	10,9	15,4	21,0	28,6	39,4	58,3	188,1	29-Out	0,1414	2,8	6,0	9,5	13,6	18,4	24,4	32,0	42,7	61,1	107,4		
07-Mai	0,2323	2,2	4,9	8,0	11,8	16,3	21,8	29,0	39,3	57,0	117,0	05-Nov	0,2323	3,1	5,9	8,9	12,2	16,1	20,7	26,5	34,6	48,2	102,3		
14-Mai	0,1616	2,2	5,2	8,8	13,2	18,5	25,2	33,9	46,5	68,4	298,7	12-Nov	0,2323	2,7	5,9	9,4	13,5	18,4	24,4	32,1	43,0	61,7	123,5		
21-Mai	0,2424	3,4	7,0	11,1	15,7	21,1	27,6	36,1	47,9	68,0	130,2	19-Nov	0,2020	2,7	5,5	8,5	12,1	16,2	21,2	27,6	36,5	51,8	109,1		
28-Mai	0,1919	2,7	6,2	10,5	15,6	21,8	29,6	39,7	54,3	79,6	173,0	26-Nov	0,1111	2,4	4,9	7,7	10,9	14,6	19,1	24,8	32,9	46,5	101,7		
04-Jun	0,1717	2,8	6,0	9,8	14,1	19,3	25,8	34,1	45,9	66,1	121,0	03-Dez	0,1616	2,8	5,9	9,2	13,1	17,6	23,2	30,3	40,2	57,2	97,5		
11-Jun	0,2020	3,1	6,6	10,6	15,1	20,5	27,1	35,6	47,6	68,1	153,5	10-Dez	0,2121	2,7	5,7	9,0	13,0	17,6	23,2	30,6	40,8	58,5	126,8		
18-Jun	0,1616	3,2	7,0	11,4	16,4	22,5	29,9	39,5	53,2	76,6	151,5	17-Dez	0,2121	3,0	6,2	9,7	13,7	18,3	24,0	31,2	41,3	58,5	121,2		
25-Jun	0,2121	4,1	8,5	13,4	19,0	25,6	33,7	44,1	58,6	83,4	277,3	24-Dez	0,1919	3,2	5,8	8,5	11,5	14,9	18,9	23,9	30,8	42,3	91,1		

Max. Obs = Máximo observado.

menor ou igual a 50 mm está compreendida entre **0,8565** ($0,2424 + 0,7676 \times 0,8$) e **0,9425** ($0,2424 +$

0,7676x0,9), ou seja, entre 85,7 e 94,3%, aproximadamente.

CONCLUSÕES

Os totais semanais de chuva de Pelotas, são representados adequadamente pela função de distribuição de probabilidade gama.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables**. Washington: Department of Commerce, 1972. 10 ed. 1046p.
- ASSIS, F. N. **Modelagem da ocorrência e da quantidade de chuva e de dias secos em Piracicaba-SP e Pelotas-RS**. Piracicaba, 1991. 134p. Tese (Doutorado em Solos e Nutrição de Plantas), Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP, 1991.
- CAMPOS, H. **Estatística experimental não paramétrica**. Piracicaba: ESALQ, 1979. 343p.
- FONSECA, V. O.; ALBUQUERQUE, J. A. S. Estimativa dos parâmetros da distribuição gama de probabilidades para totais de precipitação de uma região de Pelotas. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 13, n. 3, p. 47-58, 1978.
- GARCIA, E. A. C.; CASTRO, L. H. R. Análise da frequência de chuva no pantanal matogrossense. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 21, n. 9, p. 909-923, 1986.
- ROLDAN, J.; WOOLHISER, D. A. Stochastic daily precipitation models II. A comparison of distributions of amounts. **Water Resources Research**, Washington, v. 18, n. 5, p. 1461-1468, 1982.
- THOM, H. C. S. A note on the gamma distribution. **Monthly Weather Review**, Washington, v. 86, n. 4, p. 117-122, 1958.
- THOM, H. C. S. **Some methods of climatological analysis**. Roma: FAO, 1966. 50 p. Technical Notes 81.
- THOM, H. C. S. **Direct and inverse tables of the gamma distribution**. Department of Commerce/Environmental Data Service, 1968. 30p.
- VIVALDI, L. J. **Utilização da distribuição gama em dados pluviométricos**. Piracicaba, 1973. 77p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação) Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP, 1973.